第八、九章　多元函数积分学

第一部分、　重积分

I、　重积分的概念与性质

II、二重积分的计算法

III、三重积分

IV、重积分的应用

第二部分、　线面积分

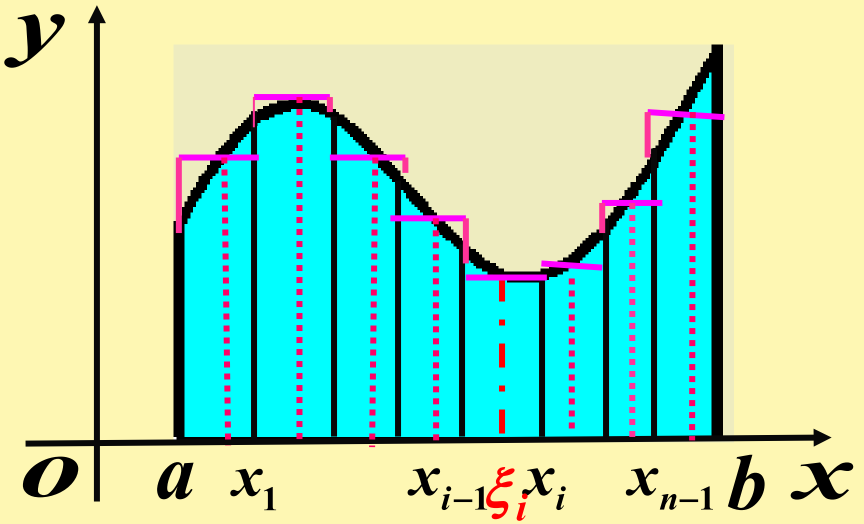
I、 重积分的概念与性质

一、　重积分的定义

二、　重积分的性质

8.1 重积分的概念与性质

一元函数的积分：定积分是某种确定形式的和的极限



曲边梯形面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

推广到定义在区域、曲线、曲面上多元函数的情形，便得到重积分、曲线积分、曲面积分的概念。

如：$\int_L f(x,y)ds$, $\iint_\Sigma f(x,y,z)dS$, $\iint_\Sigma R(x,y,z)dxdy$

8.1.1 重积分的定义

用定积分计算长度为 l 的细直杆的质量：

假定物体的密度是连续变化的

用线密度来刻画单位长度的质量

细直杆在轴上占据区间$[0，l]$，设其线密度 $\rho=\rho(x)$

若$\rho=\rho(x)\equiv k$(常数),显然此杆质量为$m=k\times l$

若$\rho=\rho(x)$不是常值函数，如何计算？

若$\rho=\rho(x)\neq$常数,则对该区间$[0,l]$作任意分割

$$0=x_0<x_1<x_1<\cdots<x_n=l$$

并任取一点$\xi_{\mathrm{i}}\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$

在每个小区间上“以常代变”，作积求和得到细直杆质量的近似值为

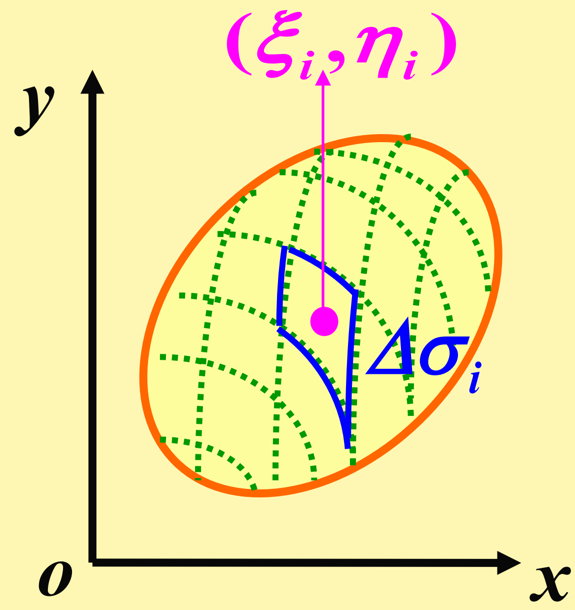
$$\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_{\mathrm{i}})\Delta x_i$$

通过求极限便可得到细直杆的质量为

$$m=\int_0^l\rho(x)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_{\mathrm{i}})\Delta x_i \qquad (1)$$

其中$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i$

若物体是一平面薄板，不妨假定它占有xoy坐标面上的区域D，并设其面密度函数为$\rho=\rho(x,y)$



$\rho(x,y)>0$且在D上连续。

均匀薄片：质量=面密度×面积

不均匀薄片：分割成n个彼此没有公共内点的闭子域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$

并任取一点$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

该薄板的质量：$m=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \qquad (2)$

其中$\Delta\sigma_i$也表示小闭区域$\Delta\sigma_i$的面积，λ是n个小闭区域直径中的最大值。

如果我们考虑的物体占据三维空间*o-xyz*的闭区域Ω，其体密度函数为$\rho=\rho(x,y,z)$，则其质量可表示为

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i,\xi_i)\Delta v_i \qquad (3)$$

其中Δv_i也表示分割区域Ω所得各个小闭区域Δv_i的体积, λ是n个小闭区域直径中的最大值。

$$m=\int_0^l\rho(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_{\mathrm{i}})\Delta x_i \qquad (1)$$

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i)\Delta\sigma_i \qquad (2)$$

三个式子都是同一类型的和式极限，(2)和（3）为定义重积分提供了物理背景。

定义8.1.1 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域上的有界函数，将区域任意分割成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域, 也表示它的面积。

任取点 $(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i)\in\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$,作积

$f(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$,并求和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i)\Delta\sigma_i$。

如果当各小区域直径的最大值λ趋于零时，上述和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域D上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$,即

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

由二重积分的定义可知，平面薄板的质量是面密度函数在薄板所占闭区域上的二重积分

$$m = \iint_D \rho(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

三重积分的定义:

定义8.1.2 设Ω是R^3中一个可求体积的有界闭区域，$f(x,y,z)$是在Ω上有定义的有界函数，将Ω分割为彼此没有公共内点的任意闭子域

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \cdots, \Omega_n$ 用λ表示各Ω_i中直径的最大值，

Δv_i表示Ω_i的体积。任取点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

作积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$，并作和$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$

当$\lambda\to 0$时，上述和式的极限存在，且该极限与Ω的分割方式及X_i的取法无关，称该极限值为函数$f(x,y,z)$在Ω上的 三重积分，记为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

其中$f(x,y,z)$称为被积函数， Ω称为积分区域，dv称为体积元素,也称函数$f(x,y,z)$在Ω上可积

由上述定义，空间立体的质量也可以通过密度函数的三重积分来表示，即

$$m=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)dv=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_{\mathrm{i}},\eta_i,\xi_i)\Delta v_i$$

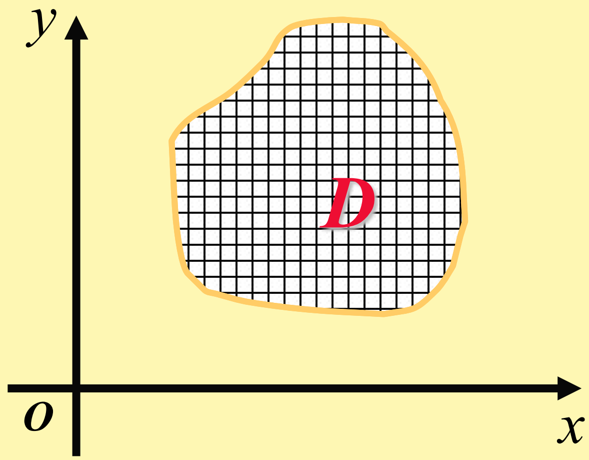
定理8.1.1

(1)（充分条件）若$f(X)$在Ω上连续，则它在Ω上可积；

(2)（必要条件）若$f(X)$在Ω上可积，则它在Ω上有界。

连续 $\Rightarrow$ 可积 $\Rightarrow$ 有界

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域 D，$\Delta\sigma_l = \Delta x_i \Delta y_j$



则面积元素

$$\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

故二重积分在直角坐标系下也可写为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\Delta v_l = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \Rightarrow dv = dxdydz$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dv = \iiint_\Omega f(x,y,z)dxdydz$$

8.1.2 重积分的性质

假设性质中涉及的函数在相应区域上均可积，D、D_1、D_2都是平面上的有界闭区域。

(1) $\sigma = \iint\limits_D 1 d\sigma = \iint\limits_D d\sigma$ σ表示D的面积

(2) (被积函数的线性可加性）若α、β为常数，则

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)] d\sigma = \iint\limits_D \alpha f(x,y) d\sigma + \iint\limits_D \beta g(x,y) d\sigma$$

$$= \alpha \iint\limits_D f(x,y) d\sigma + \beta \iint\limits_D g(x,y) d\sigma$$

(3)（积分区域的可加性）

若$D = D_1 \cup D_2$，且D_1与D_2无公共内点，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma$$

(4)（积分不等式）如果在D上有$f(x,y) \le g(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma$$

特别地，有

$$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma$$

(5)（估值定理） 设M、m分别是$f(x,y)$在有界闭区域D上的最大值和最小值，σ表示D的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

证： 由于$f(x,y)$在有界闭区域D上可积， M、m是$f(x, y)$在有界闭区域D的最大值和最小值，所以$m \le f(x, y) \le M$。

$$m\sigma = \iint_D m d\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D M d\sigma = M\sigma$$

上面的不等式也称为估值不等式。

(6)（中值定理）设函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，σ表示D的面积，则至少存在一点(ξ,η)，使

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

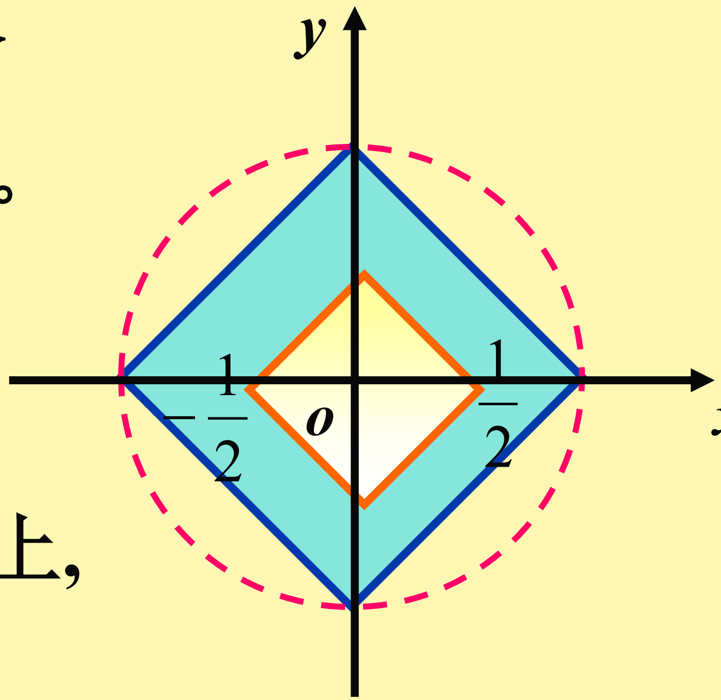
证：令 $\mu = \dfrac{\iint_D f(x,y)d\sigma}{\sigma}$，由估值定理 $m \le \mu \le M$

由连续函数的介值定理知，$f(x,y)$在D上至少存在一点(ξ,η)，使$f(\xi,\eta)=\mu$，即

$$\frac{\iint_D f(x,y)d\sigma}{\sigma} = f(\xi,\eta)$$

上式两端同乘以σ即得结论成立。

例1 不用计算,判断二重积分 $\displaystyle\iint\limits_{\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)d\sigma$ 的符号。



解 先作出积分区域D:

在积分区域D: $\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1$上,

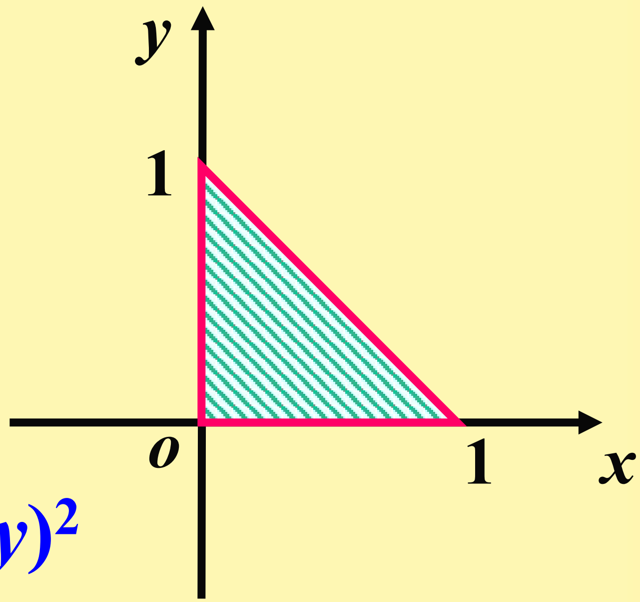
除四个顶点外,全部落在圆周$x^2+y^2=1$之内,

因而在区域$\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1$上有 $x^2+y^2\le 1$

$$\ln(x^2+y^2)\le 0 \quad\Rightarrow \iint\limits_{\frac{1}{2}\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)d\sigma\le 0$$

例2 比较$\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$与$\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$的大小。

D：x轴、y轴及$x+y=1$所围；



解 因为在区域D上

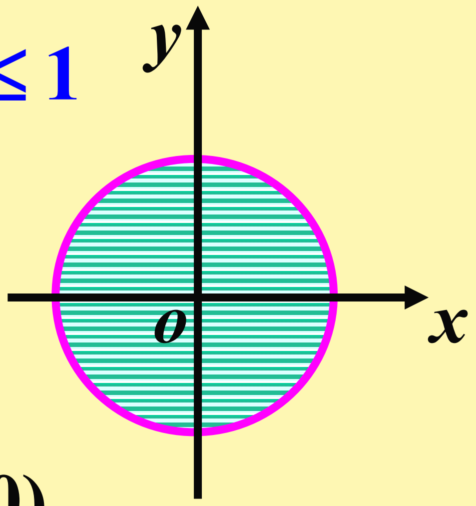
$0 \le x+y \le 1$，$\Rightarrow (x+y)^3 \le (x+y)^2$

根据性质5，得

$$\iint\limits_{D_1} (x+y)^3 d\sigma \le \iint\limits_{D_1} (x+y)^2 d\sigma \quad 。$$

例3 利用二重积分的性质，估计积分的值。

$$\iint_D (x^2+4y^2+1)d\sigma, \quad D: x^2+y^2 \le 1$$



解 先求$f(x,y)=x^2+4y^2+1$在D上的最大值、最小值。

因为$f_x=2x$，$f_y=8y$，所以有驻点$(0,0)$，

$f(0,0)=1$。

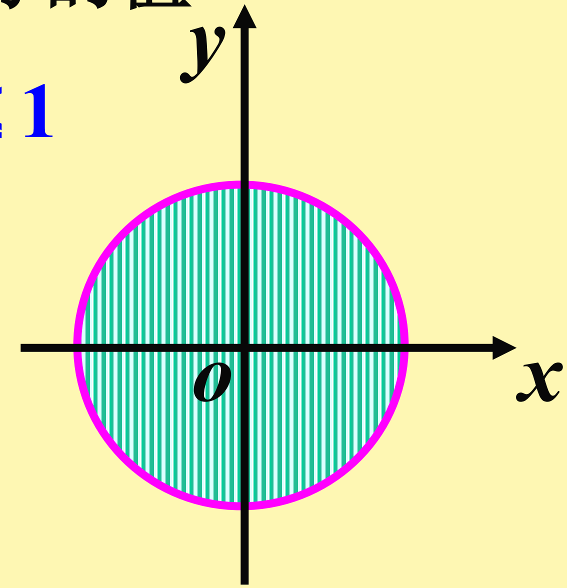
在D的边界上，令$x=\cos\theta, y=\sin\theta(0\le\theta\le 2\pi)$,

$$f(x,y)=[x^2+4y^2+1]\Big|_{x^2+y^2=1}$$

$$=\cos^2\theta+4\sin^2\theta+1=2+3\sin^2\theta=\varphi(\theta)$$

例3 利用二重积分的性质，估计积分的值

$$\iint_D (x^2+4y^2+1)d\sigma,\quad D: x^2+y^2\le 1$$



解 $f(x,y)=x^2+4y^2+1$在D内的可能极值为：$f(0,0)=1$。

在D的边界上：

$$f(x,y)=2+3\sin^2\theta=\varphi(\theta)$$

显然，在边界上$f(x,y)$的最小值为2，最大值5。

于是$f(x,y)$在D上的最小值为1，最大值为5，积分区域的面积为π, 所以有

$$1\cdot\pi\le\iint_D (x^2+4y^2+1)d\sigma\le 5\pi$$

内容小结

1、理解重积分概念与性质.

作业

同步练习册　　习题 8—1